Μαθημα 12ο 20/11/2017

Διαφ. Εξισωσεις

Ομογενης γραμμ. Δ.Ε

(E_0) $a_n y^{(n)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = 0$

$a_i \in C(I)$, $a_n \neq 0$, $t \in I$

• Βασικο συνολο λυσεων $\{y_1, \dots, y_n\} \iff W(y_1, \dots, y_n)(t) \neq 0$, $t \in I$

Προταση

Ας ειναι $\{y_1, \dots, y_n\}$ Β.Σ.Λ της (E_0) τοτε η y ειναι μια λυση της (E_0) αν και μονο αν υπαρχουν $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ μονοσημαντα ορισμενες και τ.ω

$$y(t) = c_1 y_1(t) + \dots + c_n y_n(t), \quad t \in I$$

Αποδειξη

$(\Rightarrow)$ Υποθετω οτι $\{y_1, \dots, y_n\}$ ειναι ενα Β.Σ.Λ της (E_0) και $y \neq 0$ ειναι μια λυση της εξισωσεις

Θα αποδειξω οτι υπαρχουν μονοσημαντες ορισμενες σταθερες $c_1, \dots, c_n$ τ.ω

$$y(t) = c_1 y_1(t) + \dots + c_n y_n(t), \quad t \in I$$

Ας ειναι $t_0 \in I$, Τοτε οι $y(t_0) = a_0$, $y'(t_0) = a_1, \dots, y^{(n-1)}(t_0) = a_{n-1}$ ειναι γνωστες σταθερες με $|a_0| + \dots + |a_{n-1}| \neq 0$ (?) αν ισχυει τοτε εχω τη μηδενικη λυση οποτε δε χρειαζεται να κανω τιποτα αλλο

Θεωρω το συστημα ως προς $c_1, \dots, c_n$

$$\left.\begin{array}{l} c_1 y_1(t_0) + \dots + c_n y_n(t_0) = a_0 \\ \vdots \\ c_1 y_1^{(n-1)}(t_0) + \dots + c_n y_n^{(n-1)}(t_0) = a_{n-1} \end{array}\right\} (S)$$

Παρατηρω οτι το n×n μη ομογ. γραμμ. συστημα (S) εχει οριζουσα

$$D = \begin{vmatrix} y_1(t_0) & y_2(t_0) & \dots & y_n(t_0) \\ \vdots & & & \\ y_1^{(n-1)}(t_0) & y_2^{(n-1)}(t_0) & \dots & y_n^{(n-1)}(t_0) \end{vmatrix} = W(y_1, \dots, y_n)(t_0) \neq 0$$

Επομένως το (S) έχει ακριβώς μια λύση $c_1, \dots, c_n$

Απομένει να αποδείξω ότι $y(t) = c_1 y_1(t) + \dots + c_n y_n(t) \quad \forall t \in I$

Θέτω $z(t) = c_1 y_1(t) + \dots + c_n y_n(t) \quad , t \in I$

όπου $c_1, \dots, c_n$ η λύση του S

Παρατηρώ ότι η z είναι η λύση της (E_0) (ως γραμμικός συνδυασμός λύσεων). Επίσης έχουμε

$$z(t_0) = c_1 y_1(t_0) + \dots + c_n y_n(t_0) = a_0 = y(t_0)$$

$$z'(t_0) = c_1 y_1'(t_0) + \dots + c_n y_n'(t_0) = a_1 = y'(t_0)$$

$$\vdots$$

$$z^{(n-1)}(t_0) = c_1 y_1^{(n-1)}(t_0) + \dots + c_n y_n^{(n-1)}(t_0) = a_{n-1} = y^{(n-1)}(t_0)$$

Επομένως από το θεώρημα ύπαρξης και μοναδικότητας θα είναι $z(t) = y(t) \quad \forall t \in I$

($\Leftarrow$) Υποθέτουμε ότι για τις σταθερές $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$

έχουμε $y(t) = c_1 y_1(t) + \dots + c_n y_n(t) \quad , t \in I$

με $\{y_1, \dots, y_n\}$ σ.θ.λ της (E_0)

Τότε η y είναι λύση της (E_0) ως γραμμικός συνδυασμός των λύσεων.

- ο χώρος των λύσεων της (E_0) είναι γραμμικός χώρος διάστασης n

- y λύση της $(E_0) \iff \exists\, c_1, \dots, c_n \quad y(t) = \sum_{1}^{n} c_i y_i(t) \quad , t \in I$

παραδειγμα 3, σελ 78-79 → 3 γραμ. ανεξ. λυσεις (Β.Σ.Λ)

$x^3 y''' - 4x^2 y'' + 8xy' - 8y = 0 \quad x>0$

Λυσεις της μορφης $y(x) = x^\nu, \ x>0, \ \nu \in \mathbb{Z}$

1) Επιλυση (σημαινει να βρω ολες τις λυσεις ή το γενικο τυπο λυσεων)

2) y_0 : $y_0(1)=0, \ y_0'(1)=1, \ y_0''(1)=2$

απαντηση

1) $x^3 \nu(\nu-1)(\nu-2)x^{\nu-3} - 4x^2 \nu(\nu-1)x^{\nu-2} + 8x\nu x^{\nu-1} - 8x^\nu = 0$

$x^\nu(\nu(\nu-1)(\nu-2) - 4\nu(\nu-1) + 8\nu - 8) = 0 \quad x^\nu \neq 0$

$\nu(\nu-1)(\nu-2) - 4\nu(\nu-1) + 8\nu - 8 = 0$

......

$\nu=1, \ \nu=2, \ \nu=4$

Αρα λυσεις $y_1(x) = x$

$y_2(x) = x^2$

$y_3(x) = x^4$

$$W(y_1,y_2,y_3)(x) = \begin{vmatrix} x & x^2 & x^4 \\ 1 & 2x & 4x^3 \\ 0 & 2 & 12x^2 \end{vmatrix}$$

$$\sim \ W(1) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 12 \end{vmatrix} \neq 0$$

Αρα οι λυσεις Γ.Α και $\{y_1, y_2, y_3\}$ Β.Σ.Λ

Οποτε $y(x) = c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^4$ γενικος τυπος που δινει ολες τις λυσεις $(x>0)$

2) Για το ΠΑΤ θα έχουμε

$y_0(1) = 0 \Rightarrow 0 = c_1 + c_2 + c_3$

$y_0'(1) = 1 \Rightarrow 1 = c_1 + 2c_2 + 4c_3$

$y_0''(1) = 2 \Rightarrow 2 = 2c_2 + 12c_3$

Άσκηση 5, σελ 83

$(2x+1)y'' - 4(x+1)y' + 4y = 0 \quad x > -1/2$

1) Επίλυση

Δεδομένα ότι έχει μια λύση της μορφής e^{cx} και μια λύση της μορφής $ax+b$

2) ΠΑΤ $y_0(0) = 0$, $y'(0) = -1$

$(2x+1)c^2 e^{cx} - 4(x+1)ce^{cx} + 4e^{cx} = 0$

$(2x+1)c^2 - 4(x+1) + 4 = 0 \quad x > -1/2$

$x = 0 : \quad c^2 - 4c + 4 = 0 \Rightarrow c = 2$

αλλά πρέπει να το επιβεβαιώσω

Πράγματι για $c=2$ έχουμε για $x > -1/2$

$4(2x+1) - 4(x+1)\cdot 2 + 4$

$8x + 4 - 8x - 8 + 4 = 0 \quad x > -1/2$

Άρα $y_1(x) = e^{2x}$, $x > -1/2$

$y_2 = ax+b$

$(2x+1)\cdot 0 - 4(x+1)a + 4(ax+b) = 0 \quad x > -1/2$

$-4ax - 4a + 4ax - 4b = 0$

$4(b-a) = 0$

$b = a$

Άρα $y_2(x) = x+1$, $x > -1/2$

$$w(y_1,y_2)(x) = \begin{vmatrix} e^{2x} & x+1 \\ 2e^{2x} & 1 \end{vmatrix} = e^{2x} - 2xe^{2x} - 2e^{2x} =$$

$$= e^{2x}(1-2x-2) \neq 0$$

οποτε $\{y_1, y_2\}$ Β.Σ.Λ

Προταση

Ας ειναι $y_1, \ldots, y_n : I \to \mathbb{R}$ $\xrightarrow{\text{με } w(y_1,\ldots,y_n)(t) \neq 0}$ που εχω συνεχείς παραγωγους μεχρι και n-ταξης στο I. Τοτε υπαρχει ακριβως μια ομογενης γ.δ.Ε n-ταξης για την οποια $\{y_1, \ldots, y_n\}$ ειναι Β.Σ.Λ και της οποιας ο συντελεστης του $y^{(n)}$ ειναι 1

Η εξισωση αυτη ειναι η

$$\begin{vmatrix} y & y' & \cdots & y^{(n)} \\ y_1 & y_1' & \cdots & y_1^{(n)} \\ - & - & - & - \\ y_n & y_n' & \cdots & y_n^{(n)} \end{vmatrix}(t) = 0 \quad , t \in I$$

$$= w(y, y_1, \ldots, y_n)(t)$$

- Η εξισωση με συντελεστη του $y^{(n)}$ τη μοναδα ειναι η

$$(-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{w(y_1, \ldots, y_n)(t)} \, w(y_1, \ldots, y_n)(t) = 0 \qquad t \in I$$

Ασκηση 6(ii), σελ 83

Να βρεθει εξισωση $2^{ης}$ ταξης με Θ.Θ.Λ $\{x, xe^x, x \in \mathbb{R}\}$

Μια εξισωση ειναι
$$\begin{vmatrix} y & y' & y'' \\ x & 1 & 0 \\ xe^x & e^x + xe^x & e^x x + 2e^x \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} y & y' & y'' \\ x & 1 & 0 \\ x & 1+x & x+2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$x^2 y'' - y'(x^2+2x) + y(x+2) = 0$$